Acta Sci. Math., 54 (1990), 83—87

Hypersurfaces de type semi-symétrique dans $\mathbf{R}^{n+1}$

LIVIU NICOLESCU et GABRIEL PRIPOAE

Introduites par E. Cartan, les espaces semi-symétriques sont caractérisées par la condition

$$R(X, Y)R = 0, \tag{1}$$

où $R(X, Y)$ agit en dérivation. Ces espaces sont une généralisation naturelle des espaces locallement symétriques (i.e. $\nabla R=0$) et ont fait récemment l'objet d'une classification par Z. SZABÓ [4].

Si M est une hypersurface dans $\mathbf{R}^{n+1}$, satisfaisant (1) et

$$RS = 0 \tag{2}$$

ou

$$SR = 0 \tag{3}$$

(où S est le tenseur de Ricci associé au tenseur de courbure R) alors, dans certaines conditions, il résulte ([3], [5], resp. [6]) que M est un hypercylindre. Des résultats similaires concernent le tenseur conforme de courbure ([1], [2]).

Il est donc naturel de supposer que toute condition ressemblant à (1), (2) ou (3), non-banale (et que nous désignons génériquement par «condition de type semi-symétrique») a des conséquences sur la structure de la variété. Le principal Théorème que nous allons démontrer affirme qu'une hypersurface M, non-dégénérée, dans l'espace semiriemannien $\mathbf{R}_\nu^{n+1}$ est sphérique si et seulement si sont satisfaites certaines conditions de type semi-symétrique relatives:

— à la première, à la seconde, resp. à la troisième forme fondamentale de M;
— au tenseur projectif de courbure;
— au tenseur concirculaire de courbure.

Reçu le 30 septembre, 1987.

1. Préliminaires. Soit l'espace sémi-euclidéen $\mathbf{R}_\nu^{n+1}$ de signature ν (i.e. $\underbrace{-, \ldots, -}_{\nu \text{ fois}}$, $+, \ldots, +$) et soit M une hypersurface semiriemannienne non-dégénérée, donc telle que la restriction de la métrique canonique de $\mathbf{R}_\nu^{n+1}$ soit non-dégénérée dans tout point de M. On note avec $g(1), g(2)$ la première resp. la deuxième forme fondamentale de M et on suppose que $g(2)$ est non-dégénérée.

L'hypersurface est totalement ombilicale s'il existe une fonction $f \in \mathscr{F}(M)$ t.q. $g(2) = fg(1)$.

La troisième forme fondamentale $g(3)$ de M est définie par

$$g(3)(X, Y) = g(1)(AX, AY)$$

où A est le tenseur de Weingarten (i.e. $g(1)(AX, Y) = g(2)(X, Y)$). Evidemment, si $g(1)$ est positif défini, alors $g(3)$ l'est aussi, mais $g(2)$ n'est pas forcement positif défini.

On note par $R(i)$, $S(i)$, $P(i)$, $Z(i)$ le tenseur de courbure, de Ricci, projectif de courbure, resp. concirculaire associé au tenseur fondamental $g(i)$, $i = 1, 2, 3$.

L'espace $(M, g(i))$ s'appelle irréductible si le groupe d'holonomie associé à $g(i)$ est irréductible.

Lemme 1. *Soit (N, g) une variété semi-riemannienne irréductible, R le tenseur de courbure et $h \in \tau_2^0(M)$ un tenseur symétrique, t.q.*

$$Rh = 0. \tag{4}$$

Alors il existe une fonction $f \in \mathscr{F}(M)$ telle que $g = fh$.

Démonstration. De la relation (4) il résulte

$$h_{ij,ks} - h_{ij,sk} = 0$$

d'où

$$h_{rj} R^r_{iks} + h_{ir} R^r_{jks} = 0.$$

La variété (N, g) étant irréductible, on sait que le système

$$x_{rj} R^r_{iks} + x_{ir} R^r_{jks} = 0 \tag{5}$$

a une solution unique, modulo la multiplication par une fonction. D'une autre part, une solution évidente de (5) est (g_{ij}), ce qui démontre le lemme.

Lemme 2. *Soit M une hypersurface irréductible dans $\mathbf{R}_\nu^{n+1}$, avec la deuxième forme fondamentale non-dégénérée. Si deux des trois formes fondamentales sont proportionnelles (modulo une fonction sur M), alors M est une hypersurface totalement ombilicale.*

Démonstration. Soit $f \in \mathscr{F}(M)$.

Si $g(1)=fg(2)$, il n'y a rien à démontrer.

Si $g(2)=fg(3)$, cela implique

$$g(1)(AX, Y) = fg(1)(AX, AY)$$

pour tout $X, Y \in \mathscr{X}(M)$. Mais A est nondégénéré, donc

$$g(1)(Z, AY) = fg(1)(Z, AY)$$

pour tout $Z, Y \in \mathscr{X}(M)$. Nous remarqons que l'hypothèse d'irréductibilité n'est pas nécessaire dans ces deux premiers cas.

Soit $g(1)=fg(3)$. On obtient aisément que $A^2=fI$, donc il existe une structure presque produit compatible avec la métrique $(g(1)$ ou $g(3))$. D'après le théorème de décomposition de de Rham, cela contredit l'hypothèse d'irréductibilité de M.

2. Le théorème principal. *Soit M une hypersurface dans $\mathbf{R}^{n+1}_{\nu}$, avec la première et la deuxième forme fondamentales non-dégénérées. Alors, pour tout $i, j \in \{1, 2, 3\}$, les affirmations suivantes sont équivalentes:*

(1) $(M, g(1))$ *est une hypersurface sphérique.*

(2) $(M, g(i))$ *est irréductible et (au moins) une des conditions suivantes est satisfaite:*

(2.1) $R(i)R(1) = 0, \quad i \neq 3$

(2.2) $R(i)S(1) = 0, \quad i \neq 3$

(2.3) $R(i)R(1) = 0, \quad i = 3,$ et la *courbure moyenne* $H \neq 0$

(2.4) $R(i)S(1) = 0, \quad i = 3,$ et $H \neq 0$

(2.5) $R(i)g(j) = 0, \quad i \neq j$

(2.6) $R(i)P(1) = 0, \quad i \neq 3$

(2.7) $R(i)P(1) = 0, \quad i = 3,$ et $H \neq 0$

(2.8) $R(i)Z(1) = 0, \quad i = 1$

(2.9) $R(i)\,\mathrm{Ric}\,Z(1) = 0, \quad i = 1,$

où Ric Z *est le tenseur contracté de type Ricci associé à* $Z(1)$.

Démonstration. Il est utile, peut-être, de rappeler la forme d'un tenseur projectif:

$$P(X, Y)W = R(X, Y)W - (n-1)^{-1} \cdot (S(Y, W)X - S(X, W)Y),$$

d'un tenseur concirculaire:

$$Z(X, Y)W = R(X, Y)W - r\cdot(n-1)^{-1}\cdot\big(g(X, W)Y - g(Y, Z)W\big)$$

(où r est la courbure scalaire), et de ce que

$$\operatorname{Ric} Z = S - r\cdot g.$$

On remarque les implications évidentes: (1)⇒(2), et ensuite (2.1)⇒(2.2), (2.7)⇒ ⇒(2.3)⇒(2.4), (2.6)⇒(2.1) et (2.8)⇒(2.9)⇒(2.2) (pour $i=1$).

On suppose maintenant que (2) est vraie. Soit donc $(M, g(i))$ irréductible. Il nous reste à prouver que chaqune des conditions (2.2), (2.4) et (2.5) implique (1).

(2.2)⇒(1) Si $i=1$, l'affirmation est connue ([5]). Si $i=2$, du Lemme 1 on obtient qu'il existe une fonction $f\in\mathscr{F}(M)$ t.q.

$$S(1) = fg(2). \tag{6}$$

D'autre part, la condition d'intégrabilité de Gauss nous assure que

$$R(1)(X, Y, W, V) = g(2)(X, W)\cdot g(2)(Y, V) - g(2)(X, V)\cdot g(2)(Y, W),$$

donc, après une contraction convenable,

$$S(1) = n\cdot H\cdot g(2) - g(3). \tag{7}$$

(On a noté $H = n^{-1}\cdot$ trace A la courbure moyenne). Des relations (6) et (7) on obtient

$$g(3) = (n\cdot H - f)\, g(2).$$

L'affirmation (1) résulte du Lemme 2 et du fait que l'hypersurface M ne peut pas être totalement géodésique, vu que sa deuxième forme fondamentale est non-dégénérée.

(2.4)⇒(1) Comme auparavant, on déduit

$$(f+1)\cdot g(3) = n\cdot H\cdot g(2).$$

Via l'hypothèse $H\neq 0$ et le Lemme 2, on arrive à la même conclusion.

La méthode présentée s'applique sans difficulté pour démontrer aussi l'implication (2.5)⇒(1).

Commentaires. 1. Au cours de la démonstration, on a vu que la condition $H\neq 0$ peut être affaiblie: $(H\neq 0$ ou $S(1)\neq -g(3))$.

2. La condition $i\neq j$ de (2.5) est nécessaire, à cause de l'identité $R(i)g(i)=0$, valable sur toute variété.

3. L'hypothèse $R(i)Z(1)=0$ $(i=2, 3)$ conduit à des intéressantes relations de dépendence linéaire entre $g(1)$, $g(2)$ et $g(3)$, que nous nous contentons seulement à signaler.

Bibliographie

[1] D. E. Blair, P. Verheyen et L. Verstraelen, Hypersurfaces satisfaisant à $RC=0$ ou $CR=0$ (à paraître).

[2] J. Deprez, P. Verheyen and L. Verstraelen, Characterizations of conformally flat hypersurfaces, *Czech. Math. J.*, **35** **(110)** (1985), 140—145.

[3] K. Nomizu, On hypersurfaces satisfying a certain condition on the curvature tensor, *Tôhoku Math. J.*, **20** (1968), 46—59.

[4] Z. I. Szabó, Structure theorems on Riemannian spaces satisfying $R(X, Y)\cdot R=0$. I. The local version, *J. Diff. Geom.*, **17** (1982), 531—582; II. Global versions, *Geom. Dedicata*, **19** (1985), 65—108.

[5] S. Tanno, Hypersurfaces satisfying a certain condition on the Ricci tensor, *Tôhoku Math. J.*, **21** (1969), 297—303.

[6] P. Verheyen and L. Verstraelen, A new intrinsic characterization of hypercylinders in Euclidean spaces, *Kyungpook Math., J.*, **25** (1985), 1—4.

UNIVERSITÉ DE BUCAREST
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES
BUCAREST 1, ROMÂNIA
STR. ACADEMIEI NR. 14, 70109